

ฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

(Exponential function and Logarithmic function)

จิตติเชษฐ์ ละออบักษิณ

1. เลขชี้กำลัง

นิยาม ให้ $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ copies}}$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$
3. $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

สมบัติ ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $m, n \in \mathbb{R}$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$, $a > 0$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่าง จงหาผลสำเร็จของ

1. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$
2. $\frac{2^{n+3}}{15^{-n-1}} \cdot \frac{6^{-n+2}}{5^{n+1}}$
3. $\frac{9 \cdot 3^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+2}}{3^{n+2} - 12 \cdot 3^{n-1}}$
4. $\left(\frac{64^n + 16^{2n}}{8^n + 32^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

2. ค่ารากของจำนวนจริง

นิยาม กำหนด $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$

1. y เป็นค่ารากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$
2. y เป็นค่าหลักรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ
 - (i) $y^n = x$
 - (ii) $xy \geq 0$

เราใช้สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{x}$ หรือ $x^{\frac{1}{n}}$ แทนค่าหลักรากที่ n ของ x

สมบัติ ให้ $x, y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$

1. ถ้า x มีค่ารากที่ n แล้ว $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. ถ้า x และ y มีค่ารากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
3. ถ้า x และ y มีค่ารากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$
4. ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$
5. ถ้า x มีค่ารากที่ n, m แล้ว x จะมีค่ารากที่ nm
6. $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
 $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
7. ถ้า $x > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{x} > 0$
ถ้า $x < 0$ แล้ว $\sqrt[n]{x} < 0$
ถ้า $x = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{x} = 0$

3. การหาค่าของ $\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}}$ ให้ $x, y \in [0, \infty)$ โดยที่ $x \geq 2\sqrt{y}$
 $\sqrt{x \pm 2\sqrt{y}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ โดย $x = a + b, y = ab$ และ $a \geq b$

ตัวอย่าง จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

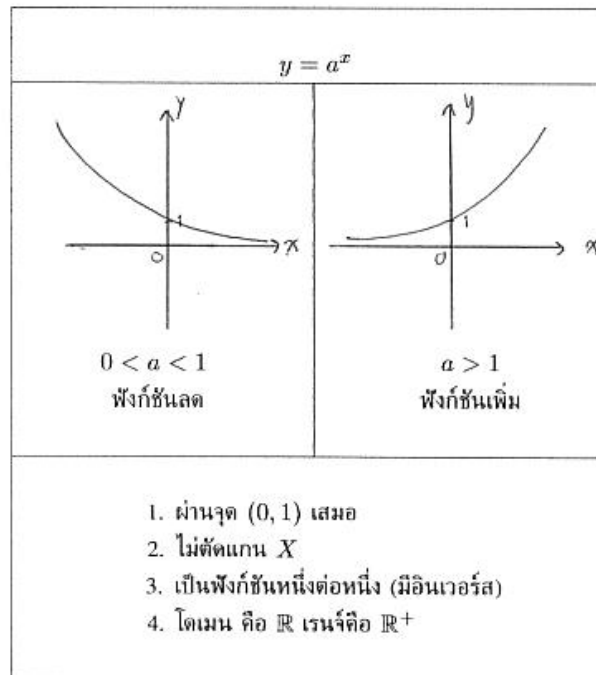
1. $\frac{x^{\frac{2}{3}} - 9\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^2} + 6 + 9x^{-\frac{2}{3}}}$
2. $\frac{4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{6\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2(x+10)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$
3. $\frac{1}{\sqrt{49+\sqrt{45}}} + \frac{1}{\sqrt{45+\sqrt{41}}} + \frac{1}{\sqrt{41+\sqrt{37}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{5}}}$
4. $\sqrt{57 + 12\sqrt{15}}$

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\sqrt{x+9} + 11 = x$
2. $3x - \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 1 - x^2$
3. $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+7} = 6$

4. ฟังก์ชันชี้กำลัง

$$\exp_a = \{(x, y) \mid y = a^x\} \text{ โดยที่ } a > 0, a \neq 1$$



การแก้สมการและอสมการฟังก์ชันชี้กำลัง

สำหรับ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

สำหรับ $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} a^x > a^y &\Leftrightarrow x < y \\ a^x \geq a^y &\Leftrightarrow x \leq y \end{aligned}$$

สำหรับ $a > 1$

$$\begin{aligned} a^x > a^y &\Leftrightarrow x > y \\ a^x \geq a^y &\Leftrightarrow x \geq y \end{aligned}$$

- ข้อสังเกต**
1. ในการจัดรูปสมการมักมีการสมมติตัวแปร
 2. อาจมีบางคำตอบที่เป็นไปไม่ได้

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 13\sqrt{3}$

2. $2^{4x+2} + 4^{x+1} = 80$

3. $5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5}$

4. $\left(\frac{4}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{25}{12}$

5. $(0.8)^x + (1.25)^x - 2.05 = 0$

6. $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34$

7. $6(3^{x+2}) - 4(5^{x+3}) = 3^{x+4} - 5^{x+4}$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $5^{x^2+3x+1.5} < 5\sqrt{5}$

2. $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 0$

3. $(0.5)^{x^2-3x+4} < 2^{-x-9}$

4. $(\sin 1^\circ)^{x^2+x} > (\sin 1^\circ)^{x+4}$

5. $a^{x^2+7} > a^{8(x-1)}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

5. ฟังก์ชันลอการิทึม

$$\log_a = \exp_a^{-1} = \{(x, y) \mid y = \log_a x\} \text{ โดยที่ } a > 0, a \neq 1$$

$y = \log_a x$	
$0 < a < 1$ ฟังก์ชันลด	$a > 1$ ฟังก์ชันเพิ่ม
<ol style="list-style-type: none"> 1. ผ่านจุด (1, 0) เสมอ 2. ไม่ตัดแกน Y 3. เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (มีอินเวอร์ส) 4. โดเมน คือ \mathbb{R}^+ เรนจ์คือ \mathbb{R} 	

การแก้สมการและอสมการฟังก์ชันลอการิทึม

สำหรับ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y$$

สำหรับ $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} \log_a x > \log_a y &\iff x < y \\ \log_a x \geq \log_a y &\iff x \leq y \end{aligned}$$

สำหรับ $a > 1$

$$\begin{aligned} \log_a x > \log_a y &\iff x > y \\ \log_a x \geq \log_a y &\iff x \geq y \end{aligned}$$

- ข้อสังเกต**
1. $x = a^y \iff y = \log_a x$
 2. เรียก x ว่าเลขหลังล็อก ซึ่งต้องมากกว่า 0
 3. ในการจัดรูปสมการมักมีการสมมติตัวแปร
 4. อาจมีบางคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ต้องตรวจคำตอบเสมอ

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\log_x 2401 = 4$
2. $\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3$
3. $\left(\frac{5}{8}\right)^{\log_2 x} + \left(\frac{8}{5}\right)^{\log_2 x} = 2.225$
4. $\log_3 [3 + 2 \log_2(1 + x)] = 0$
5. $\log_2 [\log_2 [\log_2(x^2 - 3x)]] = 0$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $\log_2(2x + 4) > \log_2(5x + 3)$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x + 1)$
3. $\log_a x^2 > \log_a(2x + 3)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม (เมื่อทุกพจน์มีความหมาย)

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = \frac{n}{m} \log_a x$
6. $a^{\log_a x} = x$
7. เขียน $\log x$ แทน $\log_{10} x$ โดยเรียก $\log x$ ว่าลอการิทึมสามัญ
เขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ เมื่อ $e \approx 2.7182818$ โดยเรียก $\ln x$ ว่าลอการิทึมธรรมชาติ
8. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\log_x a}$ เมื่อ $c > 0$ และ $c \neq 1$
9. กำหนดให้ $\log N = n + \log n_0$ โดยที่ $1 \leq n_0 < 10$ และ $n \in \mathbb{I}$
เรียก n ว่าค่าคาแรกเทอริสติก(characteristic) และเรียก $\log n_0$ ว่าค่าแมนทิสซา(mantissa)
10. $\log x = y \leftrightarrow x = \text{antilog } y$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_2 7$

2. $\frac{16^{1-\log_4 3} + 36^{1-\log_6 3}}{25^{1-\log_5 3} + 49^{1-\log_7 3}}$

3. $\frac{1}{1+\log_a bc} + \frac{1}{1+\log_b ca} + \frac{1}{1+\log_c ab}$

4. $\ln x - \ln ex + e^{\ln x - \ln y}$

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $(\log x)^2 = \log x^2$

2. $\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3$

3. $\log(x^2 + 1) - 2 \log x = 1$

4. $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{26}{5}$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $\log_5(x^2 - 3x + 2) - 2 \log_5(2x - 1) > \frac{1}{2} \log_5 4$

2. $\log |3x - 1| < 2$

3. $\log_{\frac{1}{5}}(2x^2 + 5x + 1) < 0$

4. $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} < 3^{\log_{\frac{1}{2}}(x+5)}$

(แก้ไขล่าสุด ๒ กันยายน ๒๕๔๗)