

สถิติ 3

การวิเคราะห์สัมพันธเชิงฟังก์ชัน

รศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี
อ.ทิพย์ สันติวิภาณนท์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาฯ

ข้อสรุปที่ 1

ตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม

ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีข้อมูลที่ประกอบไปด้วยตัวแปรสองตัวแปร โดยตัวแปรสองตัวนั้นมีความเกี่ยวข้องกัน ความเกี่ยวข้องกันของตัวแปร จะมีลักษณะที่ค่าของตัวแปร หนึ่งขึ้นอยู่กับอีกตัวแปรหนึ่ง เช่น รายจ่ายที่ขึ้นอยู่กับรายได้

เราจะเรียกตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอื่นว่า ตัวแปรตาม ซึ่งจากตัวอย่างคือ รายจ่าย และเรียกตัวแปรที่เหลือว่า ตัวแปรอิสระ ซึ่งจากตัวอย่างคือ รายได้

โดยสรุปแล้วในบทนี้เราจะพิจารณาถึงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ใน 3 รูปแบบ คือ

รูปแบบที่ 1 แบบเส้นตรง	มีสมการคือ	$y = mx + c$
รูปแบบที่ 1 แบบพาราโบลา	มีสมการคือ	$y = ab^x$
รูปแบบที่ 1 แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล	มีสมการคือ	$y = ax^2 + bx + c$

ข้อควรระวัง ในการหา ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันนั้นควรตรวจสอบให้แน่ชัดว่า ตัวแปรใดคือตัวแปรอิสระ ตัวแปรใดคือตัวแปรตาม

ข้อสรุปที่ 2

การประมาณค่าของค่าคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

เมื่อทราบถึงรูปของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลจากการสร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูลว่าควรอยู่ในรูปแบบใด เช่น รูปเส้นตรง รูปพาราโบลา หรือรูปเอ็กซ์โพเนนเชียล แล้วขั้นตอนต่อไปคือการหาสมการของความสัมพันธ์ โดยเริ่มจากสมการทั่วไปรูปใดรูปหนึ่งคือ $y = mx + c$, $y = ax^2 + bx + c$ หรือ $y = ab^x$ แล้วประมาณค่าของค่าคงตัวในสมการที่เลือก เมื่อทราบค่าคงตัวแล้ว จึงสามารถนำไปใช้ในการทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบหรือกำหนดค่าของตัวแปรอิสระ

ต่อไปนี้เป็นกรสรุปการหาค่าคงตัวต่าง ๆ โดยวิธีการที่เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

แบบของสมการ	การหาค่าคงตัวโดยแก้สมการต่อไปนี้
<p>(1) เส้นตรง</p> $Y = mX + c$	$\sum_{i=1}^n Y_i = cn + m \sum_{i=1}^n X_i \dots\dots(1)$ $\sum_{i=1}^n X_i Y_i = c \sum_{i=1}^n X_i + m \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots\dots(2)$
<p>(2) พาราโบลา</p> $Y = aX^2 + bX + c$	$\sum_{i=1}^n Y_i = cn + b \sum_{i=1}^n X_i + a \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots\dots(1)$ $\sum_{i=1}^n X_i Y_i = c \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 + a \sum_{i=1}^n X_i^3 \dots\dots(2)$ $\sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i = c \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \sum_{i=1}^n X_i^3 + a \sum_{i=1}^n X_i^4 \dots\dots(3)$
<p>(3) เอกซ์โพเนนเชียล</p> $Y = ab^X$	$\sum_{i=1}^n \log Y_i = n \log a + (\log b) \sum_{i=1}^n X_i \dots\dots(1)$ $\sum_{i=1}^n X_i \log Y_i = (\log a) \sum_{i=1}^n X_i + (\log b) \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots\dots(2)$

หมายเหตุ สมการต่าง ๆ ที่กล่าวถึง เป็นสมการที่ใช้ในการประมาณค่าหรือทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบหรือกำหนดค่าตัวแปรอิสระ นั่นคือ ถ้าต้องการประมาณหรือทำนายค่าตัวแปรใด ก็ต้องให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรอีกตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรอิสระ

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้

X	1	2	3	4
Y	2	5	7	8

จงหา ก) ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเส้นตรงระหว่าง Y กับ X เพื่อทำนายค่า Y

ข) ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเส้นตรงระหว่าง Y กับ X เพื่อทำนายค่า X

ตัวอย่าง 3.2 ถ้าค่าของตัวแปร X และ Y คือ

X	-1	0	1	2	3
Y	1	0	1	3	10

และสมการที่ใช้ประมาณความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปรนี้คือ $Y = kX^2$ จงหาค่า k

แบบฝึกหัด

1. ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y ของข้อมูล จากตัวอย่างพบว่า

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

และคำนวณได้ $Y = 0.545 + 0.636X$

ข้อความต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

1. ในการทำนายค่า Y ถ้าค่า X มีค่าเท่ากับ 9 จะทำนายค่า Y เป็น 7
 2. ในการทำนายค่า X ถ้าค่า Y มีค่าเท่ากับ 8 จะทำนายค่า X เป็น 11
 3. ในการทำนายค่า X ถ้าค่า Y มีค่าเท่ากับ 7 จะทำนายค่า X เป็น 10.149
 4. ในการทำนายค่า Y ถ้าค่า X มีค่าเท่ากับ 11 จะทำนายค่า Y เป็น 7.541
2. พิจารณาความถูกต้องของข้อความ I และ II ต่อไปนี้

i	1	2	3	4
X_i	1	2	3	4
Y_i	2	5	7	8

- (I) จากความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเส้นตรงระหว่าง Y กับ X เพื่อทำนายค่า X ถ้า Y มีค่าเท่ากับ 10 เราควรจะทำนายค่า X ด้วย 4.75
- (II) ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเส้นตรงระหว่างระหว่าง X กับ Y เพื่อทำนายค่า Y คือ $Y=2X+0.5$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. I ถูก II ถูก
 2. I ผิด II ถูก
 3. I ถูก II ผิด
 4. I ผิด II ผิด
3. สมการแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างต้นทุน (Y : หน่วยเป็นพันบาท) กับ จำนวนสินค้าที่ผลิต (X : หน่วยเป็นร้อยชิ้น) คือ $Y=2X+5$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- I ถ้าต้นทุน 7,000 บาท คาดว่าจะผลิตสินค้าได้ 100 ชิ้น
- II ถ้าผลิตสินค้าเพิ่ม 200 ชิ้น คาดว่าต้นทุนจะเพิ่ม 4,000 บาท

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. I ถูก และ II ถูก
2. I ผิด และ II ถูก

3. I ถูก และ II ผิด
4. I ผิด และ II ผิด
4. จากการสอบถามถึงรายจ่ายของครอบครัว 8 ครอบครัวที่มีรายได้ตั้งแต่ 1,000 บาท ถึง 14,000 บาท ได้สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของรายได้ (X) และรายจ่าย (Y) คือ

$$Y=0.636X+0.545$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

I เราสามารถใช้สมการข้างต้นทำนายรายได้เมื่อทราบรายจ่าย

II ถ้าเพิ่มข้อมูลโดยการสอบถามเพิ่มอีก 7 ครอบครัว สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของ X และ Y ยังคงเป็นสมการเดิม

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. I ถูก และ II ถูก
2. I ถูก และ II ผิด
3. I ผิด และ II ถูก
4. I ผิด และ II ผิด
5. จากการศึกษาพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างอายุ X และปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงเด็กทารก Y มีสมการเป็น $Y = 1.2X^2 + 5X + 3$ ในโรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีเด็กทารกจำนวน 5 คน ซึ่งมีอายุ 4, 6, 8, 9, 10 เดือน ตามลำดับปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงทารกนี้โดยเฉลี่ยคนละเท่าไร
1. 110.28 2. 111.28 3. 112.28 4. 113.28

6. ตารางข้างล่างนี้เป็นข้อมูลเกี่ยวกับเงินที่ใช้ในการโฆษณาสินค้าต่อเดือน (X) หน่วยเป็นหมื่นบาท และจำนวนเงินที่ได้จากการขายผลิตภัณฑ์ที่ลงทุนโฆษณาไปต่อเดือน (Y) หน่วยเป็นแสนบาท

X	5	1	3	4	2
Y	10	3	6	7	4

จากข้อมูล หาค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^5 X_i = 15 \quad \sum_{i=1}^5 Y_i = 30 \quad \sum_{i=1}^5 X_i^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i^2 = 210 \quad \sum_{i=1}^5 X_i Y_i = 107$$

กำหนดว่า จำนวนเงินที่ขายสินค้าได้มีความสัมพันธ์กับเงินค่าใช้จ่ายในการโฆษณาในแบบเส้นตรง ถ้าบริษัทตั้งเป้าหมายที่จะทำให้จำนวนเงินที่ขายสินค้าได้ต่อเดือนเป็นเงิน 12,000,000 บาท บริษัทควรลงทุนโฆษณาเป็นเงินต่อเดือนประมาณเท่าใด

1. 642,000 บาท 2. 652,900 บาท

3. 676,000 บาท

4. 705,900 บาท

7. ในการประมาณความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของ X และ Y ด้วยฟังก์ชันเส้นตรง โดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าคงตัวเมื่อมีข้อมูลของ X และ Y ดังนี้

X	0	1	2
Y	5	2	1

ค่า Y ที่ทำนายได้ เมื่อ $X = \frac{1}{3}$ คือข้อใด

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

8. ให้ใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่เป็นเส้นตรงกับข้อมูลต่อไปนี้

ปริมาณปุ๋ย (ก.ก. ต่อไร่)	ผลผลิต(ก.ก.ต่อไร่)
1	8
2	9
3	10
4	12
5	15

ถ้าปริมาณปุ๋ยเท่ากับ 3.5 กิโลกรัมต่อไร่ แล้วผลผลิตจะเป็นเท่าใด

1. 11.65

2. 12.35

3. 14.48

4. 15.60

9. จากการทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) และระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ดังนี้

t	1	2	3	4
s	2	8	18	32

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดนี้เป็นแบบเส้นตรง แล้วเราจะทำนายระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ขณะที่ t เท่ากับ 1.5 วินาที ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 เมตร

2. 4 เมตร

3. 5 เมตร

4. 6 เมตร

เฉลย								
1. 4	2. 4	3. 2	4. 4	5. 2	6. 3	7. 4	8. 1	9. 3

ข้อสรุปที่ 3 ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลา

ข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลา คือ ข้อมูลที่แสดงความเปลี่ยนแปลงตามลำดับก่อนหลังของช่วงเวลาที่ข้อมูลชุดนั้น ๆ เกิดขึ้น ซึ่งปกติแล้วข้อมูลชุดนั้นมักจะเกิดขึ้นในช่วงเวลาเท่า ๆ กัน เช่น ปริมาณข้าวที่ประเทศไทยผลิตได้ในแต่ละปี

สำหรับการแทนค่า X ของช่วงเวลาที่ทำ ๆ กัน ซึ่งอาจจะเป็น วัน เดือน พ.ศ. หรือ ค.ศ. นั้น โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าจำนวนช่วงเวลาที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เป็นจำนวนคี่มักจะกำหนดให้ช่วงเวลาที่อยู่ตรงกลางเป็น 0 และช่วงเวลาที่อยู่ถัดขึ้นไปก่อนหน้าช่วงเวลาที่กำหนดเป็น 0 นี้เป็น $-1, -2, -3, \dots$ ตามลำดับ ส่วนช่วงเวลาที่อยู่ถัดลงมาซึ่งเป็นช่วงเวลาที่เกิดขึ้นภายหลังจะกำหนดเป็น $1, 2, 3, \dots$ ตามลำดับ

ในกรณีที่จำนวนช่วงเวลาที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เป็นจำนวนคู่ มักแทนสองช่วงเวลาที่อยู่ตรงกลางเป็น -1 และ 1 และแทนช่วงเวลาที่อยู่ถัดขึ้นไปเป็น $-3, -5, -7, \dots$ ตามลำดับ ส่วนช่วงเวลาที่เกิดขึ้นภายหลังแทนด้วย $3, 5, 7, \dots$ ตามลำดับ ในการกำหนดค่าดังกล่าวข้างต้นมาใช้แทนตัวแปรซึ่งเป็นช่วงเวลานี้ ก็เพื่อให้การคำนวณค่าคงตัวทำได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เพราะผลรวมของทุก ๆ ค่าของ X จะเท่ากับ 0 และในการทำนายค่าของตัวแปรตามจะต้องเปลี่ยนช่วงเวลาให้อยู่ในรูปของค่า X ที่กำหนดให้โดยวิธีดังกล่าวด้วย

ตัวอย่างที่ 4.1 จากข้อมูลในรูปอนุกรมเวลา (Y) มีค่าแสดงในตารางข้างล่างนี้

พ.ศ.	2543	2544	2545	2546	2547
Y	2	3	2	4	6

ถ้า Y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับเวลา (X) ในลักษณะเส้นตรง แล้วสามารถทำนายค่าของ Y ในปี 2550 ได้เท่ากับเท่าใด

แบบฝึกหัด

1. ให้ใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่เป็นเส้นตรงกับข้อมูลต่อไปนี้

พ.ศ.	จำนวนขายของเครื่องจักร (พันเครื่อง)
2543	1
2544	2
2545	4
2546	5
2547	7

โดยในปี พ.ศ. 2550 จำนวนขายของเครื่องจักรควรเป็นเท่าใด

1. 8,300 เครื่อง
2. 11,300 เครื่อง
3. 12,800 เครื่อง
4. 15,800 เครื่อง

2. จากข้อมูลอนุกรมเวลา มีค่าแสดงในตารางข้างล่างนี้

พ.ศ.	2540	2541	2542	2543	2544
Y	20	30	20	40	60

ถ้า Y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับ (X) ในลักษณะเส้นตรง แล้วสามารถทำนายค่าของ ในปี 2549 ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 97
2. 106
3. 110
4. 120

3. ข้อมูลอุตสาหกรรมสิ่งทอที่ประเทศไทยส่งออกไปขายยังต่างประเทศ ระหว่างปี พ.ศ. 2540-2544 เป็นดังนี้

พ.ศ.	2540	2541	2542	2543	2544
มูลค่า (ล้านบาท)	1	3	4	5	9

ถ้าพยากรณ์โดยใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด แล้วมูลค่าการส่งออกโดยเฉลี่ยใน 6 เดือนแรกของปี พ.ศ. 2545 จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 4.5 ล้านบาท
2. 9.8 ล้านบาท
3. 4.9 ล้านบาท
4. ข้อ 1,2 และ 3 ไม่มีข้อถูก

เฉลย		
1. 2	2. 1	3. 3