

ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

รศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี
อ. ทิพวัลย์ สันติวิธานนท์
ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาฯ

บทนิยามที่ 1 การทดลองสุ่ม คือ การทดลองซึ่งทราบว่ามีผลลัพธ์อาจเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เหล่านั้น

ตัวอย่างที่ 1 การทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง เป็นการทดลองสุ่ม เพราะสามารถบอกได้ว่า ผลลัพธ์อาจเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่ไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่า เมื่อทอดลูกเต๋าแล้ว จะออกแต้มใด

บทนิยามที่ 2 แซมเปิลสเปซ คือเซตที่มีสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 2 ให้การทดลองสุ่มคือ การโยนลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าเราสนใจว่า แต้มที่ออกจะเป็นอะไร จะได้แซมเปิลสเปซคือ

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ถ้าเราสนใจว่า แต้มที่ออกจะเป็นเลขคู่หรือคี่ จะได้แซมเปิลสเปซคือ

$$S_2 = \{\text{จำนวนคู่}, \text{จำนวนคี่}\}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้การทดลองสุ่มคือ การโยนเหรียญหนึ่งอันไปเรื่อยๆ

ถ้าเราสนใจว่า จำนวนครั้งที่โยนเหรียญจนกว่าเหรียญจะขึ้นหัวเป็นครั้งแรก จะได้แซมเปิลสเปซคือ

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 3 จะเห็นได้ว่า แซมเปิลสเปซอาจเป็นเซตอนันต์ก็ได้

บทนิยามที่ 3 เหตุการณ์ คือสับเซตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่างที่ 4 ในการทดลองทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มที่ได้ เราจะได้แซมเปิลสเปซคือ

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ถ้า E_1 คือเหตุการณ์ที่แต้มที่ออกเป็นเลขคู่ จะได้ว่า

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

ถ้า E_2 คือเหตุการณ์ที่แต้มที่ออกมีค่าน้อยกว่า 4 จะได้ว่า

$$E_2 = \{1, 2, 3\}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้แซมเปิลสเปซ

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

และเหตุการณ์ E_1, E_2, E_3, E_4 คือ

$$E_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$E_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$E_3 = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$E_4 = \{1, 6, 7\}$$

จงหา 1. $E_1 \cup E_2$

2. $E_1 \cap E_2$

3. E_3

4. $E_3 - E_1$

ข้อสังเกต เราจะเห็นได้ว่า เหตุการณ์ นั้นเป็นเซต ดังนั้นเราจึงสามารถนำเหตุการณ์ทั้งหลายมาดำเนินการในทางเซต เช่น อินเตอร์เซกชัน, ยูเนียน หรืออื่นๆ ได้

บทนิยามที่ 4 ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $E_1 \cap E_2 = \phi$
เราเรียก E_1 และ E_2 ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

บทนิยามที่ 5 ถ้า N เป็นจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน และ n เป็นจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นสับเซตของเหตุการณ์ S แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นสับเซตของเหตุการณ์ S แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E มีค่าเท่ากับ $\frac{n}{N}$ เราใช้สัญลักษณ์ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E

ตัวอย่างที่ 6 ในการทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งอันสองครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสองจะขึ้นหัวตลอดทั้งสองครั้ง

ตัวอย่างที่ 7 ในการทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูก จงหาความน่าจะเป็นของ

(1) ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10

(2) ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว

ถ้านักเรียนพิจารณานิยามของความน่าจะเป็น จะทำให้นักเรียนได้ข้อสรุปดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ S คือแซมเปิลสเปซที่ประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน และมีจำนวนจำกัด และเหตุการณ์ E, E_1 และ E_2 เป็นสับเซตของ S ดังนั้นเราจะได้ข้อความต่อไปนี้จริง

1. $P(\phi) = 0$ ($\because n(\phi) = 0$)
2. $0 \leq P(E) \leq 1$ ($\because E \subseteq S$)
3. $P(S) = 1$
4. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
5. $P(E) = 1 - P(E')$

ตัวอย่างที่ 1 หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 200 ครอบครัว โดยมีครอบครัวที่ปลูกข้าว 100 ครอบครัว ปลูกข้าวโพด 130 ครอบครัว และปลูกทั้งข้าวและข้าวโพด 50 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนั้นจะปลูกข้าวหรือข้าวโพด

ตัวอย่างที่ 2 จากประวัติของผู้ป่วยของคลินิกแห่งหนึ่ง ที่ป่วยเป็นโรคหัวใจหรือโรคความดันโลหิตสูงซึ่งมีจำนวน 50 คน โดยมีผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจ 20 คน มีผู้ป่วยที่เป็นทั้งโรคหัวใจและโรคความดันโลหิตสูง 15 คน ถ้าสุ่มหยิบประวัติผู้ป่วย 1 ราย แล้วความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะป่วยด้วยโรคหัวใจอย่างเดียว หรือป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{3}{5}$
3. $\frac{7}{10}$
4. $\frac{9}{10}$

ตัวอย่างที่ 3 คนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยพี่น้อง 2 คน และเด็กอื่นๆ อีก 6 คน จงหาความน่าจะเป็นที่พี่น้อง 2 คน จะนั่งไม่ติดกันในการจัดเด็กทั้งกลุ่มนี้ นั่งเป็นวงกลม

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าความน่าจะเป็นที่แดงจะอายุยืนถึง 20 ปี ข้างหน้าเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ดำจะอายุยืนถึง 20 ปี ข้างหน้าเท่ากับ 0.9 และความน่าจะเป็นที่แดง หรือ ดำ จะมีอายุยืนถึง 20 ปี ข้างหน้าเท่ากับ 0.96 แล้วข้อใดต่อไปนี้คือความน่าจะเป็นที่แดง และ ดำ จะมีอายุยืนถึง 20 ปี ข้างหน้า

1. 0.04
2. 0.46
3. 0.54
4. 0.96

ตัวอย่างที่ 5 ในการทดลองสุ่มใดๆ ให้ $P(A)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = 0$
2. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = 1$
3. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = \frac{1}{2}$
4. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) > \frac{1}{2}$

แบบฝึกหัด

- ทอดลูกเต๋าทึงตรง 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่ได้ผลต่างกันของแต้มมีค่าน้อย 4 คือข้อใด

 1. $\frac{2}{36}$
 2. $\frac{3}{36}$
 3. $\frac{4}{36}$
 4. $\frac{6}{36}$
- สุ่มเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนทั้งหมด 10 คนที่มีอายุต่างๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักเรียนที่มีอายุน้อยที่สุดรวมอยู่ด้วย มีค่าเท่ากับข้อใด

 1. $\frac{1}{720}$
 2. $\frac{1}{120}$
 3. $\frac{1}{10}$
 4. $\frac{3}{10}$
- มีเหรียญเที่ยงตรง 3 อัน ถ้าใช้สี่เขียนเลข 1 ที่หน้าหัว และเขียนเลข 2 ที่หน้าก้อย เมื่อจะโยนเหรียญทั้งสามอันนี้พร้อมกันหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของเลขที่หงายขึ้นมีค่าไม่เกิน 5 มีค่าเท่ากับข้อใด

 1. $\frac{1}{8}$
 2. $\frac{3}{8}$
 3. $\frac{4}{8}$
 4. $\frac{7}{8}$
- กล่องใบหนึ่งมีบัตรอยู่หนึ่งพันใบ หมายเลข 000 ถึง 999 ถ้าสุ่มหยิบบัตรหนึ่งใบ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรที่มีหมายเลขประกอบด้วยเลขที่เรียงติดกัน ไปเป็นเท่าไร

 1. 1
 2. $\frac{1}{125}$
 3. $\frac{2}{125}$
 4. ไม่ถูกต้องทั้ง 1, 2 และ 3
- ลูกเต๋าทึงหน้าลูกหนึ่ง หน้าคู่แต่ละหน้ามีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่าๆ กัน หน้าคี่แต่ละหน้ามีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่าๆ กัน แต่หน้าคู่มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของหน้าที่ ถ้าทอดลูกเต๋านี้หนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หน้าสองหรือหน้าสามหรือหกจะเกิดขึ้นเท่ากับเท่าไร

 1. $\frac{5}{6}$
 2. $\frac{5}{9}$
 3. $\frac{5}{12}$
 4. $\frac{1}{3}$
- โยนเหรียญ 3 อันที่ต่างกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

 1. $\frac{1}{8}$
 2. $\frac{5}{6}$
 3. $\frac{7}{8}$
 4. $\frac{11}{12}$
- สอบถาม 500 ครอบครัว พบว่า 320 ครอบครัว มีรถจักรยานยนต์ และ 210 ครอบครัว มีโทรทัศน์ มี 190 ครอบครัวที่มีทั้งสองอย่างนี้ สุ่มครอบครัวมา 1 ครอบครัว จากทั้งหมดนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีทั้งสองอย่างนี้

 - ก. $\frac{1}{2}$
 - ข. $\frac{1}{13}$
 - ค. $\frac{8}{25}$
 - ง. $\frac{17}{30}$
- บริษัทแห่งหนึ่งเปิดรับพนักงานใหม่เข้าทำงานใน 4 แผนก แผนกละ 4 คน โดยให้แต่ละแผนกมีพนักงานใหม่เป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน มีผู้สมัครเป็นชาย 10 คน หญิง 9 คน จะมีจำนวนวิธีคัดเลือกพนักงานเข้าทำงานในแผนกต่างๆ ทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10!9!}{(8!)^2}$ 2. $\frac{10!9!}{2^4}$ 3. $\frac{10!9!}{2^9}$ 4. $\frac{10!9!}{(4!)^2}$
9. ในจำนวนผู้สมัครเข้าทำงานตำแหน่งหนึ่ง จำนวน 12 คน เมื่อตรวจสอบแล้วมีเพียง 8 คนที่มีคุณสมบัติครบถ้วนจริงๆ ถ้าเลือกผู้สมัครมาโดยสุ่ม 3 คน เพื่อไปสัมภาษณ์ ความน่าจะเป็นที่มีเพียง 2 คน ที่มีคุณสมบัติครบถ้วน คือ
1. $\frac{28}{55}$ 2. $\frac{7}{55}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. 1
10. หนังสือนวนิยายเรื่องหนึ่งมี 10 ตอน ๆ ละ 1 เล่ม หนังสือดังกล่าวนี้มีหมายเลขบอกตอนไว้ ตั้งแต่หมายเลข 1 ถึง 10 ตามลำดับ สุ่มหยิบหนังสือทีละเล่มเรียงไว้บนหิ้งหนังสือยาวตามลำดับที่หยิบได้จนครบทั้งสิบเล่ม ความน่าจะเป็นที่หนังสือหมายเลขต่อเนื่องกันจะอยู่ติดกันมีค่าเท่าไร
1. $\frac{1}{10!}$ 2. $\frac{1}{9!}$ 3. $\frac{2}{10!}$ 4. $\frac{2}{9!}$
11. ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้าย มีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลง โดยเลือกเพลงจากเพลงทั้งหมด 5 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{8}{25}$ 2. $\frac{9}{25}$ 3. $\frac{12}{25}$ 4. $\frac{13}{25}$
12. ในการขายบัตรชิงรางวัลรถยนต์คันหนึ่ง บัตรที่ขายแต่ละใบมีหมายเลขประจำบัตรเป็นเลขห้าหลักต่างๆ กัน โดยแต่ละหลักเป็นเลขใดเลขหนึ่งใน 0, 1, 2, 3, 4, 5 หมายเลขรางวัลได้จากการหมุนวงล้อซึ่งวางเรียงกัน ถ้าการหมุนแต่ละวงล้อจะขึ้นเลข 0, 1, 2, 3, 4 หรือ 5 เลขใดเลขหนึ่งด้วยโอกาสเท่าๆ กันแล้ว ความน่าจะเป็นที่หมายเลขรางวัลจะเป็นหมายเลขที่มีเลขหลักต่างๆ ซ้ำกันอย่างน้อยสองหลัก มีค่าเท่าใด
1. $\frac{49}{54}$ 2. $\frac{5}{54}$ 3. $\frac{601}{625}$ 4. $\frac{24}{625}$
13. ความน่าจะเป็นที่ ก. จะสอบผ่านวิชาภาษาไทยเท่ากับ $\frac{2}{3}$ และสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษเท่ากับ $\frac{4}{9}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาจากการสอบวิชาดังกล่าวเท่ากับ $\frac{4}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชา
1. $\frac{14}{45}$ 2. $\frac{2}{15}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{4}{15}$
14. มีสามภรรยา 5 คู่ นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมอย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่สามภรรยาคู่พิเศษคู่หนึ่งได้นั่งติดกัน
1. $\frac{7}{9}$ 2. $\frac{5}{9}$ 3. $\frac{2}{9}$ 4. $\frac{1}{3}$

15. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วต่างกัน 13 ลูก โดยเป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก นอกนั้นเป็นสีเหลืองส้มหิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีต่างกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{54}{78}$ 2. $\frac{26}{78}$ 3. $\frac{27}{78}$ 4. $\frac{13}{78}$
16. ในการเลือกจำนวนเต็มหนึ่งจำนวนจากจำนวนเต็มตั้งแต่ 10 ถึง 59 จะได้ความน่าจะเป็นที่เลขจำนวนนั้นหารด้วย 7 ลงตัว หรือเป็นเลขคี่ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. .36 2. .50 3. .58 4. .64
17. เลือกจำนวนเต็มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัวมาหนึ่งจำนวนให้มีค่าอยู่ระหว่าง 10 ถึง 200 ความน่าจะเป็นที่จำนวนที่เลือกมานี้จะหารด้วย 7 ลงตัวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{2}{7}$ 3. $\frac{3}{7}$ 4. $\frac{4}{7}$
18. คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 6 คน และหญิง 4 คน ในกลุ่มนี้มีผู้ถนัดซ้าย 7 คน ซึ่งเป็นชาย 5 คน ถ้าสุ่มเลือกคนมา 3 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ทั้งชายและหญิง โดยที่ชายที่ถนัดซ้ายมากกว่าหญิงที่ถนัดซ้ายเท่ากับข้อใด
1. $\frac{5}{24}$ 2. $\frac{6}{24}$ 3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{12}{24}$
19. ในการลากเส้นเชื่อมจุดยอด 2 จุดใดๆ ของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม โดยที่เส้นนั้นๆ ไม่ใช่ด้านของรูปสิบเหลี่ยมดังกล่าว ความน่าจะเป็นที่เส้นเชื่อมนั้นไม่ใช่เส้นรอบรูปและไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{6}{7}$ 2. $\frac{8}{9}$ 3. $\frac{13}{14}$ 4. $\frac{17}{18}$
20. สลาก 20 ใบ มีหมายเลขกำกับตั้งแต่ 1 ถึง 20 สลากหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 มีรางวัล 1,000 , 500 , 300 และ 200 ตามลำดับ ชายผู้หนึ่งหยิบสลาก 2 ใบ แบบสุ่มจากสลากทั้งหมด ความน่าจะเป็นที่เขาจะได้รางวัลรวมกัน 500 บาทพอดี มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{17}{190}$ 2. $\frac{16}{190}$ 3. $\frac{2}{190}$ 4. $\frac{1}{190}$
21. ตารางแสดงความสัมพันธ์ของสุขภาพผู้สูบบุหรี่ทั้งหมด 300 คน เป็นดังนี้

สุขภาพของผู้สูบบุหรี่	จำนวนมวนบุหรี่ที่สูบใน 1 วัน			
	0 - 4	5 - 20	มากกว่า 20	รวม
เป็นมะเร็ง	8	7	25	40
ไม่เป็นมะเร็ง	150	70	40	260

จงใช้ตารางข้างต้นตอบคำถามต่อไปนี้

ผู้สูบบุหรี่มากกว่า 20 มวนใน 1 วัน มีความน่าจะเป็นที่จะไม่เป็นมะเร็งมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{13}$ 2. $\frac{2}{13}$ 3. $\frac{2}{15}$ 4. $\frac{13}{15}$

22. ถ้าเขียนพจน์ทุกพจน์ของการกระจาย $(a + b)^{10}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a \neq b$ ลงบนสลากขนาดเท่ากันสลากละหนึ่งพจน์ ใส่สลากทั้งหมดลงในกล่องแล้วหยิบสลากออกมา 1 ใบ โดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้สลากมีพจน์ซึ่งสัมประสิทธิ์ทวินามเป็น 252 เท่ากับข้อใด

1. 0 2. $\frac{1}{11}$ 3. $\frac{1}{10}$ 4. $\frac{2}{11}$

23. ในการจัดหญิง 8 คน ซื่อไม่ซ้ากันเข้าพักในเรือนรับรองหลังหนึ่ง ซึ่งมี 4 ห้อง ถ้ามี 1 ห้อง ที่อยู่ได้ 3 คน มี 2 ห้อง ที่อยู่ได้ห้องละ 2 คน และมี 1 ห้องอยู่ได้ 1 คน ถ้าอ้อยและอ่อนเป็นหญิงสองคนในจำนวน 8 คนนี้แล้ว ความน่าจะเป็นที่อ้อยและอ่อนจะได้อยู่ห้องเดียวกันเท่ากับ

1. $\frac{1}{28}$ 2. $\frac{1}{14}$ 3. $\frac{5}{28}$ 4. $\frac{1}{4}$

24. กล่องใบหนึ่งมีบัตร n ใบ ($n \geq 3$) ซึ่งเป็นหมายเลขกำกับไว้โดยไม่ซ้ากันเริ่มจาก 1 ถึง n ถ้าหยิบบัตรออกมา 2 ใบ โดยสุ่มแล้วความน่าจะเป็นที่ได้ใบหนึ่งเป็นบัตรหมายเลข 3 และอีกใบหนึ่งเป็นบัตรหมายเลขที่ต่ำกว่า 3 จะเท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{n^2}$ 2. $\frac{2}{n(n-1)}$ 3. $\frac{1}{n(n-1)}$ 4. $\frac{4}{n(n-1)}$

25. ในกล่องใบหนึ่ง มีบัตร 10 ใบ เขียนเลขที่เป็นจำนวนบวก 6 ใบ และจำนวนลบ 4 ใบ ถ้าหยิบบัตรขึ้นมาอย่างสุ่ม 3 ใบ และนำเลขบนบัตรมาแทนค่า A, B, C ในสมการ $D = \frac{(A)(B)}{C}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ D เป็นจำนวนบวก คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{4}{15}$ 3. $\frac{11}{30}$ 4. $\frac{7}{15}$

26. เลขานุการผู้หนึ่งพิมพ์จดหมาย 4 ฉบับ ถึงคน 4 คน พร้อมจำหน่ายซอง ถ้าเขานำจดหมายใส่ซองอย่างสุ่ม โดยไม่ได้สนใจว่าใส่จดหมายในซองที่ถูกต้องหรือไม่ ความน่าจะเป็นที่จะมีจดหมาย 2 ฉบับ ใส่ซองที่ถูกต้องคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{6}{24}$ 2. $\frac{7}{24}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{13}{24}$

เฉลย

1. 4	2. 4	3. 4	4. 2	5. 2	6. 3	7. 3	8. 3	9. 1	10. 3
11. 4	12. 1	13. 1	14. 3	15. 1	16. 3	17. 1	18. 3	19. 1	20. 1
21. 1	22. 2	23. 4	24. 4	25. 4	26. 1				

แบบฝึกหัด

- กำหนด E, E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิล S เดียวกัน ข้อความต่อไปนี้ข้อใดผิด
 - $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
 - ถ้า $E_1 \subset E_2$ แล้ว $P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$
 - ถ้า $P(E_1) = P(E_2)$ แล้ว E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์เดียวกัน
 - ถ้า $E = \phi$ แล้ว $P(E) = 0$
- กำหนด E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S เดียวกัน
ถ้า $P(E_1 - E_2) = P(E_2 - E_1) = P(E_1 \cap E_2) = k$
แล้วจะได้ว่า $P(E_1 \cup E_2)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - k
 - $2k$
 - $3k$
 - $4k$
- เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดย $P(A) = \frac{3}{5}, P(B \cap A') = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}$
จงหา $P(A' \cap B')$
 - $\frac{1}{15}$
 - $\frac{5}{15}$
 - $\frac{8}{15}$
 - $\frac{9}{15}$
- กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซเดียวกัน
ถ้า $P(A) = \frac{11}{24}, P(A - B) = \frac{1}{8}, P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ แล้ว $P(B)$ เป็นเท่าไร
 - $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{2}$
- ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูก
 - ถ้า $P(A) = P(B) = 0.3$ แล้ว $P(A' \cap B') = 0.7$
 - ถ้า $P(A) = 0.2$ และ $P(B) = 0.4$ แล้ว $P(A' \cup B) = 0.4$
 - ถ้า $P(A) = 0.3$ และ $P(B) = 0.5$ แล้ว $P(A' \cap B) = 0.5$
 - ถ้า $P(A) = 0.2$ และ $P(B) = 0.3$ แล้ว $P(B' \cup A') = 0.5$
- ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ซึ่ง $P(A \cap B) = P(A \cap B') = P(A' \cap B) = 0.1$
แล้ว $P(A \cup B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 0.1
 - 0.2
 - 0.3
 - 0.4

เฉลย

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 1. 3 | 2. 3 | 3. 1 | 4. 4 | 5. 3 | 6. 3 |
|------|------|------|------|------|------|

แบบฝึกหัด

- ในการจัดเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรจากคำว่า COOKINGO จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอักษร "O" 3 ตัวอยู่ติดกัน
 - $\frac{1}{28}$
 - $\frac{2}{28}$
 - $\frac{3}{28}$
 - $\frac{4}{28}$
- ในการเลือกอักษร 4 ตัวจากอักษร "BEERBARREL" จงหาความน่าจะเป็นที่อักษรทั้ง 4 ตัว จะไม่ซ้ำกันเลย
 - $\frac{5}{34}$
 - $\frac{6}{34}$
 - $\frac{120}{278}$
 - $\frac{110}{278}$
- ในการสร้างคำโดยการเลือกอักษร 4 ตัว จากอักษร "BEERBARREL" จงหาความน่าจะเป็นที่อักษรทั้ง 4 ตัว จะไม่ซ้ำกันเลย
 - $\frac{5}{34}$
 - $\frac{6}{34}$
 - $\frac{60}{193}$
 - $\frac{110}{193}$
- ในการสร้างเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $a, b, c, d \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $d = 0$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมตริกซ์อนึ่งกกูลาร์เป็นเท่าไร
 - $\frac{80}{5^3}$
 - $\frac{16}{5^3}$
 - $\frac{10}{5^3}$
 - $\frac{20}{5^3}$
- กำหนดเซต A มีสมาชิก 4 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว ถ้าสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชัน 1-1 มีค่าเท่ากับข้อใด
 - $\frac{24}{625}$
 - $\frac{120}{625}$
 - $\frac{24}{196}$
 - $\frac{120}{196}$
- กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และแซมเปิลสเปซ S คือเซตของฟังก์ชันจาก A ไป B ให้เหตุการณ์ $E = \{f \mid f \in S \text{ และ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และมี } x \in A \text{ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ } f(x) = x\}$ จงหา $P(E)$
 - $\frac{19}{100}$
 - $\frac{17}{100}$
 - $\frac{1}{100}$
 - $\frac{10}{100}$
- การรับผู้เข้าศึกษาในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ผู้มีสิทธิ์เข้าศึกษาจะต้องสอบผ่านเกณฑ์มาตรฐานของทั้งสามวิชา คือ คณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ และวิทยาศาสตร์ ในการสอบคัดเลือกเข้าศึกษาต่อครั้งหนึ่งมีผู้สนใจเข้าสอบ 100 คน ปรากฏว่ามหาวิทยาลัยประกาศผู้มีสิทธิ์เข้าศึกษาได้ 5 คน เมื่อวิเคราะห์จากผลการสอบ พบว่ามีผู้สอบผ่านเกณฑ์มาตรฐานวิชาดังนี้

คณิตศาสตร์	40 คน
ภาษาอังกฤษ	30 คน
วิทยาศาสตร์	30
คณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ	15 คน
คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์	12 คน
ภาษาอังกฤษและวิทยาศาสตร์	14 คน

เมื่อสุ่มเลือกนักเรียนมาหนึ่งคน จะมีโอกาสเท่าไรที่นักเรียนจะไม่สอบผ่านเกณฑ์มาตรฐานเลขสี่วิชา

1. $\frac{5}{100}$ 2. $\frac{36}{100}$ 3. $\frac{33}{100}$ 4. $\frac{26}{100}$

8. ในการสอบข้อเขียนของนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมีจำนวน 120 คน คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้มีการแจกแจงแบบปกติ โดยใช้เกณฑ์ตัดสินผลการสอบว่า ถ้านักเรียนได้ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชานี้มากกว่า -1.96 จะถือว่าสอบได้ ทั้งนี้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติเมื่อคะแนนมาตรฐานน้อยกว่า -1.96 มีค่าเท่ากับ 0.025 จงหา นักเรียนที่สอบได้ทั้งหมด

1. 118 คน 2. 110 คน 3. 115 คน 4. 117 คน

9. กำหนดให้ ตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

z	0.0	0.1	0.2	0.3
0.1	.0000	.0398	.0793	.1179
1.0	.3413	.3643	.3849	.4032
2.0	.4773	.4821	.4861	.4893
3.0	.4987	.4990	.4993	.4995

จากประสบการณ์อาการแพทย์ไทยพบว่า น้ำหนักของเด็กไทยแรกเกิดมีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีน้ำหนักเฉลี่ย 3000 กรัม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 400 กรัม จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กไทยแรกเกิดจะมีน้ำหนักตั้งแต่ 3,800 กรัม

1. .9773 2. .4773 3. .0227 4. ข้อมูลไม่พอ

10. ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าถ่วงน้ำหนักจนกระทั่งทำให้ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 มีค่าเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{9}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้มสี่ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{13}{15}$ 4. $\frac{14}{15}$

11. นักเรียน 4 ห้อง ส่งผู้แทนไปคัดเลือกเป็นกรรมการห้องละ 2 คน เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกกรรมการ 4 คน จากผู้แทนทั้ง 8 คน เป็นชาย 2 คน และเป็น หญิง 2 คน โดยที่ชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มากกว่าห้องเดียวกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{12}{35}$ 2. $\frac{15}{35}$ 3. $\frac{18}{35}$ 4. $\frac{32}{35}$

12. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ปรากฏว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่าน

- คณิตศาสตร์ และ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านเคมี ถ้าความน่าจะเป็นของนักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้ที่จะสอบผ่านอย่างมากหนึ่งวิชาเป็น $\frac{4}{5}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{1}{15}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{13}{15}$
13. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 – 10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีแต้มรวมกันเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5 มีค่าเท่ากับข้อใด
1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{40}$ 3. $\frac{1}{30}$ 4. $\frac{1}{20}$
14. ในการสุ่มหยิบลูกกวาดจากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกกวาดอยู่ 4 ชนิด ชนิดละ 2 เม็ด (ขนาดไม่เท่ากัน) ให้แก่เด็กชายสองคน คนละ 4 เม็ด ความน่าจะเป็นที่เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 ชนิด เท่ากับในข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{8}{35}$ 2. $\frac{6}{35}$ 3. $\frac{4}{35}$ 4. $\frac{2}{35}$
15. ในการจัดงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้แจกบัตรแก่ผู้เข้าชมงาน 100 ใบ ซึ่งมีหมายเลขตั้งแต่ 00 ถึง 99 กำกับอยู่ สุ่มหยิบต้นข้าวของบัตรมา 1 ใบ เพื่อมอบรางวัลแก่ผู้เข้าชมงาน ผู้ที่มีบัตรซึ่งมีหมายเลขตรงกับต้นข้าวที่หยิบได้จะได้รับรางวัลที่ 1 ส่วนผู้ที่มีบัตรหมายเลขซึ่งมีหลักหน่วยตรงกับต้นข้าว หรือหลักสิบตรงกับต้นข้าวเพียงหลักเดียวจะได้รับรางวัลที่ 2 ถ้าสมชายได้รับแจกบัตรมา 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่สมชายจะได้รับรางวัลคือข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{19}{100}$ 4. $\frac{1}{5}$
16. มีแคปซูลซึ่งบรรจุยาชนิดหนึ่งจำนวน 5 แคปซูล ปนกับแคปซูลซึ่งบรรจุแป้ง จำนวน 10 แคปซูล ถ้าหยิบมา 2 แคปซูล อย่างสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้แคปซูลซึ่งบรรจุทั้งสองแคปซูลเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{5}{15}$ 3. $\frac{2}{21}$ 4. $\frac{10}{21}$
17. บ้านพักและโรงเรียนของสมศักดิ์อยู่ริมน้ำ เขาจึงเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านโดยทางเรือ ถ้ากำหนดว่าเรือที่สมศักดิ์จะใช้บริการได้ มีเรือด่วน 10 ลำ เรือหางยาว 8 ลำ ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์จะเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านด้วยเรือด่วนลำเดียวกัน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{18}$ 2. $\frac{1}{18^2}$ 3. $\frac{10}{18}$ 4. $\frac{10}{18^2}$
18. ในการเลือกตัวเลขสามตัวโดยไม่เจาะจงจาก (1, 2, 3, 4) โดยเลือกทีละตัวและไม่ซ้ำกันความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวเลขสามตัวที่มีผลบวกเป็น 6 เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

19. สมชายมีเสื้ออยู่ 3 ตัว เป็นสีขาว 3 ตัว สีฟ้า 2 ตัว มีกางเกงขายาว 4 ตัว เป็นสีขาว 1 ตัว และสีเทา 3 ตัว ถ้าสมชายแต่งตัวออกจากบ้านโดยไม่เจาะจงแล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และกางเกงสีต่างกันคือข้อใด
1. $\frac{15}{20}$ 2. $\frac{16}{20}$ 3. $\frac{17}{20}$ 4. $\frac{18}{20}$
20. ในการแข่งขันตอบปัญหารายการหนึ่ง ผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนต้องเลือกปัญหา 4 ข้อ ในแต่ละครั้งถ้าในกล่องที่ใส่ปัญหาอย่างยากให้เลือกอยู่ 8 ข้อ และมีปัญหาอย่างง่ายให้เลือกอยู่ 6 ข้อ ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะเลือกได้ปัญหาอย่างยากและอย่างง่ายอย่างละ 2 ข้อ คือข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{8!6!}{4!C_{14,4}}$ 2. $\frac{8!6!}{C_{14,4}}$ 3. $\frac{8!}{(2!)^2 4! C_{14,4}}$ 4. $\frac{8!}{(2!)^2 C_{14,4}}$
21. ถ้าต้องการเลือกมูลนิธิ 12 แห่งจากที่มีอยู่ทั้งหมด 24 แห่ง เพื่อการบริจาคเงินตลอดปีโดยบริจาคให้มูลนิธิ 1 แห่งในแต่ละเดือนไม่ซ้ำกัน จำนวนวิธีของการบริจาคคือข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{24!}{12!}$ 2. $\frac{24!}{2!12!}$ 3. $\frac{24!}{(12!)^2}$ 4. $\frac{24!}{2!(12!)^2}$
22. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 4 ลูก สีแดง 6 ลูก สีเขียว 6 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลขึ้นมา 2 ลูก อย่าไม่เจาะจงความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีต่างกันคือข้อใดต่อไปนี้
- ก. $\frac{9}{34}$ ข. $\frac{25}{34}$ ค. $\frac{74}{144}$ ง. $\frac{108}{144}$
23. โยนเหรียญ 1 อัน พร้อมกับลูกเต๋า 2 ลูก ถ้าเหรียญขึ้นหัวจะได้เงินเท่ากับผลบวกของแต้มจากลูกเต๋าทิ้งสอง ถ้าเหรียญขึ้นก้อยจะได้เงินเท่ากับผลต่างของแต้ม ความน่าจะเป็นที่จะได้เงินอย่างมาก 4 บาท มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{1}{9}$ 3. $\frac{17}{36}$ 4. $\frac{5}{9}$
24. ชาย 3 คน และหญิง 4 คน เข้าคิวในแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วรถไฟขบวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $1/210$ 2. $6/210$ 3. $12/210$ 4. $24/210$
25. สูดามีเสื้อ 10 ตัว เป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว สีเขียว 1 ตัว และสีขาว 4 ตัว และมีกระโปรง 6 ตัว เป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว และสีเขียว 1 ตัว สมมติว่าสูดาแต่งตัวออกจากบ้านอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่สูดาจะแต่งตัว โดยสวมเสื้อและกระโปรงสีต่างกันมีค่าเป็นเท่าใด
1. $7/30$ 2. $2/5$ 3. $23/30$ 4. $53/60$
26. แจกันใบหนึ่งมีดอกกุหลาบสีแดง 3 ดอก สีชมพู 3 ดอก สีส้ม 3 ดอก สีขาว 2 ดอก และสีเหลือง 2 ดอก สุ่มหยิบ

ดอกไม้จากแจกันใบนี้มีมา 3 ดอก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ดอกไม้สีละดอกมีค่าอยู่ในช่วงใด

1. (0, .25) 2. (.25, .50) 3. (.50, .75) 4. (.75, 1)

27. ผู้จัดการฝ่ายบุคคลของบริษัทหนึ่งคิดว่า การจำแนกใบสมัครของผู้สมัครตามวุฒิหรือตามประสบการณ์ในการทำงานจะเป็นประโยชน์ต่อการพิจารณาคัดเลือกบุคคลเข้าทำงานเป็นอย่างมาก จากใบสมัครตำแหน่งวิศวกรทั้งหมด เขาพบว่า มีเพียง 10 เปอร์เซนต์ เท่านั้นที่เป็นผู้ที่มีประสบการณ์แต่ไม่มีปริญญา มี 20 เปอร์เซนต์ เป็นผู้ที่จบปริญญาแต่ไม่มีประสบการณ์ มีถึง 80 เปอร์เซนต์ที่มีประสบการณ์หรือมีปริญญา ถ้าสุ่มตัวอย่างใบสมัครมา 1 ใบ ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูก

1. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้สมัครที่มีปริญญา = .70
 2. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่มีประสบการณ์ = .60
 3. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่ไม่มีทั้งปริญญาและประสบการณ์ = .20
 4. ถูกทั้งข้อ 1, 2 และ 3.

28. กล้องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดต่างกัน 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก นอกนั้นเป็นสีเหลืองสุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{54}{78}$ 2. $\frac{26}{78}$ 3. $\frac{24}{78}$ 4. $\frac{13}{78}$

29. กล้องใบหนึ่งบรรจุปากกา 1 โหล เป็นปากกาสีแดง 3 ด้าม สีเขียว 4 ด้าม ที่เหลือเป็นสีน้ำเงิน ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบปากกามา 3 ด้าม แล้วได้ครบทุกสีมีค่าเท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{22}$ 3. $\frac{3}{11}$ 4. $\frac{3}{12}$

เฉลย									
1. 3	2. 1	3. 3	4. 1	5. 2	6. 2	7. 2	8. 4	9. 3	10. 1
11. 3	12. 1	13. 1	14. 1	15. 3	16. 3	17. 4	18. 1	19. 3	20. 3
21. 3	22. 2	23. 4	24. 4	25. 3	26. 3	27. 4	28. 1	29. 3	

ทฤษฎีบททวินาม

รศ. ดร.กฤษณะ เนียมมณี

อ. ทิพวัลย์ สันติวิธานนท์

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาฯ

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

เราจะเรียก

$$\binom{n}{r} \text{ เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } 0 \leq r \leq n$$

ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

ข้อสังเกต

1. ในการกระจาย $(a + b)^n$ เราจะได้จำนวนพจน์ทั้งหมด $n + 1$ พจน์
2. พจน์ที่ $r + 1$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

3. จากข้อ 2. เราสังเกตได้ว่า กำลังของ a และ b จะต้องรวมกันได้เท่ากับ n เสมอ

ตัวอย่างที่ 1 จงกระจาย

- ก. $(a + b)^4$
- ข. $(a - b)^4$
- ค. $(2x - 3y)^4$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(t + 3)^{12}$

ตัวอย่างที่ 3 ก. จงหาพจน์ที่มี b^7 จากการกระจาย $(a + b)^{10}$

- ข. จงหาพจน์ที่ไม่มี x ปรากฏอยู่เลยในการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$

ตัวอย่างที่ 4 ก. จงหาพจน์ที่มี b^7 จากการกระจาย $(a - b)^8$

- ข. จงหาพจน์ที่มี x^4 จากการกระจาย $(x^2 - \frac{1}{x^2})^{12}$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

ข้อสังเกต สัมประสิทธิ์ของ $(a + b)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$n = 1$		1	1		
$n = 2$		1	2	1	
$n = 3$		1	3	3	1
$n = 4$	1	4	6	4	1
\vdots				

สังเกตได้ว่า สัมประสิทธิ์แต่ละตัวได้จากการนำจำนวนสองจำนวนที่อยู่ติดกันและเหนือขึ้นไปมาบวกกัน เราเรียกรูปแบบข้างบนนี้ว่า สามเหลี่ยมปาสคาล ตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ที่ค้นพบ

แบบฝึกหัด

1. ในการกระจาย $(xy - 2y^{-3})^8$ พจน์ที่มีผลบวกของกำลังของ x กับกำลังของ y เท่ากับ -4 มีสัมประสิทธิ์เท่ากับข้อใด

1. -488	2. 1120
3. 70	4. 56

2. สัมประสิทธิ์ของ x^r ในการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(2n)!}{(\frac{2n+r}{3})! (\frac{4n-r}{3})!}$	2. $\frac{(2n)!}{(\frac{4n-r}{3})}$
3. $\frac{(2n)!}{r!(2n-r)!}$	4. $\frac{(2n)!}{(2r)!}$

3. ข้อใดต่อไปนี้ถูก
 1. ในการกระจาย $(x^3 + \frac{1}{2x})^8$ สัมประสิทธิ์ของ x^{12} คือ 56
 2. ในการกระจาย $(x^3 + \frac{1}{2x})^8$ ไม่มีพจน์ใดเลยที่เป็นค่าคงที่
 3. ในการกระจาย $(x + y)^n - (x - y)^n$ สัมประสิทธิ์ของ $x^2 y^{n-2}$ คือ $\binom{n}{2}$ เมื่อ n คือจำนวนคู่บวก
 4. จากการกระจาย $(x + y)^n - (x - y)^n$ จนเป็นผลสำเร็จแล้ว จะเหลือพจน์อยู่ $\frac{n}{2}$ พจน์

เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

4. ใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย $2,048$ โดยให้แต่ละพจน์ในการกระจายเป็นจำนวนเต็มแล้วพจน์ที่ 9 ของการกระจายมีค่าเท่าไร

1. $\binom{11}{10}$ 2. $\binom{11}{9}$ 3. $\binom{11}{4}$ 4. $\binom{11}{3}$

5. ในการกระจาย $(x^3 + \frac{1}{x^2})^{15}$ พจน์ที่ไม่มี x ปรากฏอยู่คือ

1. พจน์ที่ 9 คือ $\binom{11}{10}$ 2. พจน์ที่ 9 คือ $\binom{15}{9}$
 3. พจน์ที่ 10 คือ $\binom{15}{9}$ 4. พจน์ที่ 10 คือ $\binom{15}{10}$

6. สัมประสิทธิ์ของ x ในการกระจายแล้วบวกกันเป็นผลสำเร็จของ

$$1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \dots + (1 + x)^{10}$$

คือข้อใด

1. 40 2. 45 3. 55 4. 65

7. สัมประสิทธิ์ของ x^{54} ในอนุกรม

$$1 + (1 + x^2) + (1 + x^2)^2 + \dots + (1 + x^2)^{50}$$

คือข้อใด

1. $\binom{50}{27}$ 2. $\binom{50}{28}$ 3. $\binom{51}{27}$ 4. $\binom{51}{28}$

8. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์จากการกระจาย $(a + b)^n$ เป็น 256 แล้ว $n^2 + n + 1$ เท่ากับข้อใด

1. 8 2. 64 3. 72 4. 73

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนพจน์จากการกระจาย $(2x - 3y)^5$ มี 6 พจน์

ข. พจน์กลางจากการกระจาย $(x + 2y)^8$ คือ $1120x^4y^4$

ค. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทุกพจน์จากการกระจาย $(5x - 3y)^5$ คือ 32

ข้อความดังกล่าว

1. จริงทุกข้อ 2. เท็จทุกข้อ
 3. จริงข้อเดียว 4. เท็จข้อเดียว

เฉลย

1. 2 2. 3 3. 4 4. 4 5. 3 6. 3 7. 4 8. 4 9. 4